УДК 514.75

М. В. Кретов

О ПОЛЯХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ, СВЯЗАННЫХ С КОМПЛЕКСОМ ЦЕНТРАЛЬНЫХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРКВАДРИК

Определены внутренним образом связанные с комплексом (n-параметрическим семейством) центральных невырожденных гиперквадрик в n-мерном аффинном пространстве поля некоторых геометрических объектов и выяснен их геометрический смысл.

A field of some geometrical objects internally connected with a complex (n-parametrical family) of the central nondegenerate hyperquadrics in n-dimensional affine space are defined and their geometrical sense is found out.

Ключевые слова: комплекс, гиперквадрика, гиперконус, многообразие, гиперэллипсоид, аффинное пространство, геометрический объект, уравнение Пфаффа, тензор.

Key words: complex, hyperquadric, hypercone, manifold, hyperellipsoid, affine space, geometrical object, Pfaff's equation, tensor.

Продолжается исследование n-параметрических семейств (комплексов) центральных невырожденных гиперквадрик K_n в n-мерном аффинном пространстве, представленных в [1].

Рассмотрим аффинное пространство A_n размерности $n \geqslant 3$. Отнесем его к подвижному реперу $R = \{A, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, состоящему из точки A и n линейно независимых векторов $\mathbf{e}_\alpha$ ($\alpha, \beta, \ldots = 1, 2, \ldots, n$). Инфинитезимальные перемещения репера $R = \{A, \mathbf{e}_\alpha\}$ определяются уравнениями

$$dA = \omega^\alpha \mathbf{e}_\alpha,\ d\mathbf{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \mathbf{e}_{\beta,} \tag{1}$$

причем $\omega^\alpha, \omega_\alpha^\beta$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha,\ D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\chi \wedge \omega_\gamma^\alpha,$$

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2015. Вып. 10. С. 76 – 80.

выражающим условия полной интегрируемости системы (1).

Пусть G — фундаментальная группа пространства A_n над полем действительных чисел, q — центральная невырожденная гиперквадрика пространства A_n и C — ее центр. Центральная невырожденная гиперквадрика q пространства A_n является индуцирующей фигурой ранга $N = C_{n+2}^2 - 1$ индекса n [2]. Ее уравнение запишется в виде

$$a_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta + 2a_\alpha X^\alpha - 1 = 0, \tag{2}$$

причем $\det(a_{\alpha\beta}) \neq 0$, $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, $\det\begin{pmatrix} a_{\alpha\beta} & a_\alpha^{\mathrm{T}} \\ a_\alpha & -1 \end{pmatrix} \neq 0.$

Обозначим $R(q)$ множество всех гиперквадрик, аффинно эквивалентных гиперквадрике (2). Согласно работе [3] $R(q)$ является *однородным пространством, или пространством Клейна*.

Формы Пфаффа

$$\Delta a_{\alpha\beta} \equiv \nabla a_{\alpha\beta} - 2a_{\alpha\beta} a_\gamma \omega^\gamma,\ \Delta a_\alpha \equiv \nabla a_\alpha - a_{\alpha\beta}\omega^\beta - 2a_\alpha a_\beta \omega^\beta \tag{3}$$

суть структурные дифференциальные формы [4] многообразия $R(q)$.

Пусть центр C гиперквадрики q имеет координаты C^α. Тогда

$$a_{\alpha\beta} C^\beta + a_\alpha = 0.$$

Обозначим буквами $a^{\alpha\beta}$ приведенные миноры матрицы $(a_{\alpha\beta})$. Тогда

$$C^\alpha = -a^{\alpha\beta} a_\beta, \tag{4}$$

$$a_\alpha = -a_{\alpha\beta} C^\beta.$$

Из формул (4) следует, что формы Пфаффа $\Delta C^\alpha = \nabla C^\alpha + \omega^\alpha$ — структурные дифференциальные формы центра гиперквадрики q.

Для построения репера R_0 проведем частичную канонизацию репера R следующим образом: $a_\alpha = 0$.

Согласно лемме Н. М. Остиану [5] такая канонизация репера R возможна. Действительно, обозначим символом δ дифференцирование по вторичным параметрам, а символами $\pi^\alpha, \pi_\beta^\alpha, \overset{\circ}{\Delta} a_{\alpha\beta}, \overset{\circ}{\Delta} a_\alpha$ — значения форм $\omega^\alpha, \omega_\beta^\alpha, \Delta a_{\alpha\beta}, \Delta a_\alpha$ при фиксированных первичных параметрах (то есть при неподвижной гиперквадрике q). Тогда из формул (3) следует

$$\overset{\circ}{\Delta} a_{\alpha\beta} = \delta a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma}\pi_\beta^\gamma - a_{\gamma\beta}\pi_\alpha^\gamma,\ \overset{\circ}{\Delta} a_\alpha = -a_{\alpha\beta}\pi^\beta,$$

откуда легко выделить подсистему n уравнений, разрешимых относительно n вторичных форм.

Геометрически репер R_0 характеризуется тем, что его вершина помещается в центр гиперквадрики q.

Уравнение гиперквадрики q и система дифференциальных уравнений комплекса K_n в репере R_0 принимают соответственно вид

$$a_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta - 1 = 0, \tag{5}$$

$$\nabla a_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma.$$

Замкнутая система дифференциальных уравнений Пфаффа многообразия K_n запишется в виде

$$\nabla a_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\gamma},\ \nabla\Lambda_{\alpha\beta\gamma} \wedge \omega^{\gamma} = 0. \tag{6}$$

Предложение 1. *Система (6) определяет комплекс K_n с произволом C_{n+1}^2 функций n аргументов.*

Г. Ф. Лаптев установил [4], что погруженное многообразие обладает в общем случае основным объектом (фундаментальным объектом наинизшего порядка, система дифференциальных уравнений которого алгебраически разрешима относительно всех вторичных форм). Надлежащее задание компонент один раз продолженного основного объекта определяет погруженное многообразие с точностью до констант.

Основным объектом многообразия K_n является фундаментальный объект $\Gamma_1 = \{a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta\gamma}\}$. Продолжая систему (6) дважды, получим:

$$\nabla\Lambda_{\alpha\beta\gamma} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\omega^{\delta},\ \nabla\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} \wedge \omega^{\delta} = 0,\ \nabla\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}\omega^{\varepsilon},$$

где коэффициенты $\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$ согласно лемме Картана [6] симметричны по соответствующим индексам.

Компоненты фундаментальных объектов комплекса K_n удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\nabla a_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma} = \omega^{\gamma},\ \nabla\Lambda_{\alpha\beta\gamma} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\omega^{\delta},\ \nabla\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}\omega^{\varepsilon}. \tag{7}$$

Рассмотрим систему величин $b_{\alpha} = a^{\beta\gamma}\Lambda_{\beta\gamma\alpha}$. Применяя формулы (7) и учитывая, что $a_{\alpha\beta}a^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$, получим $\nabla b_{\alpha} = b_{\alpha\beta}\omega^{\beta}$.

Из этой системы дифференциальных уравнений следует

Предложение 2. *Система величин $\{b_{\alpha}\}$ образует геометрический объект, присоединенный к центроаффинной группе.*

Замечание. Объект $\{b_{\alpha}\}$ является линейным однородным [7].

Введем величины $b^{\alpha} = a^{\alpha\beta}b_{\beta}$. Непосредственным дифференцированием можно установить, что $\nabla b^{\alpha} = b_{\beta}^{\alpha}\omega^{\beta}$, откуда следует

Предложение 3. *Система величин $\{b^{\alpha}\}$ образует геометрический объект, называемый контрвариантным вектором [7].*

Рассмотрим теперь систему величин $b_{\alpha\beta\gamma} = \dfrac{1}{3}(\Lambda_{\alpha\beta\gamma} + \Lambda_{\beta\gamma\alpha} + \Lambda_{\gamma\alpha\beta})$. С помощью дифференцирования получаем: $\nabla b_{\alpha\beta\gamma} = b_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}\omega^{\varepsilon}$, значит, имеет место

Предложение 4. *Система величин $\{b_{\alpha\beta\gamma}\}$ образует трижды ковариантный симметрический тензор [7].*

Объект $\{b_{\alpha}\}$ задает инвариантную диаметральную гиперплоскость $L_{n-1} \equiv b_{\alpha}X^{\alpha} = 0$ гиперквадрики q, заданной уравнением (5). Если гиперквадрика q является гиперэллипсоидом, то центр $\hat{C}$ смежного [8] к (5) гиперэллипсоида $\hat{q}$, заданного уравнением

$$\hat{a}_{\alpha\beta}X^{\alpha}X^{\beta} - 2a_{\alpha\beta}\omega^{\alpha}X^{\beta} - 1 = 0,$$

где $\hat{a}_{\alpha\beta} = da_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\delta}\omega_{\beta}^{\gamma} - a_{\gamma\beta}\omega_{\alpha}^{\gamma} = 0$ тогда и только тогда лежит в гиперплоскости L_{n-1}, когда относительный объем тел, ограниченных этими гиперэллипсоидами, равен единице.

Контрвариантный вектор $\{b^{\alpha}\}$ определяет инвариантную точку B, лежащую на диаметре гиперквадрики q, сопряженном инвариантной гиперплоскости L_{n-1} относительно q.

Пусть $M(\mathrm{m}^{\alpha})$ — произвольная инвариантная точка пространства A_n. Величину $m = a_{\alpha\beta}m^{\alpha}m^{\beta}$ назовем *асимптотическим инвариантом точки* M. Условие $m = 0$ означает, что диаметр AM является асимптотикой [7] гиперквадрики q. Если же $m \neq 0$, то $m = \left(\frac{AM}{AM_1}\right)^2$, где M_1 — одна из точек пересечения диаметра AM с образующим элемента комплекса K_n.

Обозначим $a = \det(a_{\alpha\beta}), \hat{a} = \det(\hat{a}_{\alpha\beta})$, где $\hat{a}_{\alpha\beta}$ — коэффициенты уравнения смежной гиперквадрики $\hat{q}$.

Соотношение $\frac{\hat{a}}{a} = 1 + m\frac{A\hat{C}}{AM}$ — характеристическое условие совпадения точки M с инвариантной точкой B.

Трижды ковариантный симметрический тензор $\{b_{\alpha\beta\gamma}\}$ задает инвариантный гиперконус третьего порядка

$$b_{\alpha\beta\gamma}X^{\alpha}X^{\beta}X^{\gamma} = 0 \tag{8}$$

с вершиной в центре гиперквадрики q. Действительно, уравнения асимптотических гиперконусов гиперквадрик q и $\hat{q}$ имеют вид

$$a_{\alpha\beta}X^{\alpha}X^{\beta} = 0, \tag{9}$$

$$(a_{\alpha\beta} + \Lambda_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\gamma})X^{\alpha}X^{\beta} = 0. \tag{10}$$

Общая точка M_0 инвариантных гиперконусов (8) и (9) всегда лежит на гиперконусе (10), если смещение центра происходит по общей образующей AM_0.

Список литературы

1. *Кретов М.В.* Дифференцируемые многообразия, ассоциированные с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик в аффинном пространстве. Калининградский государственный университет, Калининград, 1981. Рукопись деп. в ВИНИТИ 22 июня 1981 г., № 3003-81 Деп.

2. *Малаховский В.С.* Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве // Тр. геометрического семинара ВИНИТИ АН СССР. М., 1969. С. 179—206.

3. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М., 1966.

4. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Московского математического общества. М., 1953. Т. 2. С. 275—382.

5. *Остиану Н.М.* О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RPR). 1962. Vol. 7, № 2. С. 231–240.

6. *Картан Э.* Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. М., 1963.

7. *Лумисте Ю.Г.* Проективные связности в канонических расслоениях многообразий плоскостей // Матем. сб. М., 1973. Т. 91, № 2. С. 211—233.

Об авторе

Михаил Васильевич Кретов — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: kretov1@mail.ru

About the author

Dr Michail Kretov – Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: kretov1@mail.ru